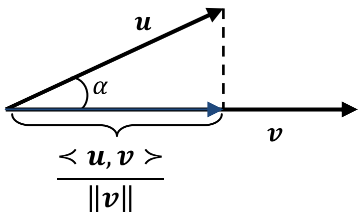
14. PROYECCIÓN ORTOGONAL

14.1. EL VECTOR MÁS CERCANO A $\boldsymbol{u}$ EN $\mathcal{L}(\boldsymbol{v})$

Si el ángulo que forman los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es α, entonces $\|\boldsymbol{u}\|\cos(\alpha) = \frac{\prec \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \succ}{\|\boldsymbol{v}\|}$. Interpretando esta igualdad en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ se tiene que el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $\boldsymbol{u}$ y que tiene un cateto en la dirección del vector $\boldsymbol{v}$, verifica que la longitud de este cateto es exactamente $\frac{\prec \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \succ}{\|\boldsymbol{v}\|}$, por tanto, el vector que representa ese cateto es:



$$\hat{\boldsymbol{u}} = \frac{\prec \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \succ}{\|\boldsymbol{v}\|}\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{\prec \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \succ}{\prec \boldsymbol{v},\boldsymbol{v} \succ}\boldsymbol{v}$$

Dicho vector notado por $\hat{\boldsymbol{u}}$, recibe el nombre de proyección ortogonal de $\boldsymbol{u}$ en la dirección del vector $\boldsymbol{v}$.

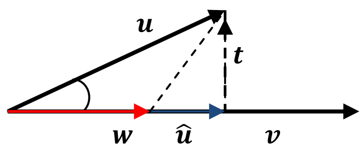
DEFINICIÓN

La **proyección ortogonal** del vector $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ sobre el subespacio $\mathcal{L}(\boldsymbol{v}) \subset \mathbb{R}^n$ es el vector

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \frac{\prec \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \succ}{\prec \boldsymbol{v},\boldsymbol{v} \succ}\boldsymbol{v}$$

OBSERVACIONES

- El vector $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{v})^{\perp}$, pues $\prec \boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v} \succ = \prec \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \succ - \frac{\prec \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \succ}{\prec \boldsymbol{v},\boldsymbol{v} \succ} \prec \boldsymbol{v},\boldsymbol{v} \succ = 0$. En $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}}$ es el vector que representa al otro cateto del triángulo rectángulo.
- Cualquier otro vector $\boldsymbol{w}$ que tenga la dirección del vector $\boldsymbol{v}$ está más lejos de $\boldsymbol{u}$ que el vector $\hat{\boldsymbol{u}}$. En otras palabras, el vector más cercano a $\boldsymbol{u}$ de todos los vectores que tienen la dirección de $\boldsymbol{v}$, es su proyección ortogonal.

  La justificación de este hecho en $\mathbb{R}^3$ la proporciona el teorema de Pitágoras: si $\boldsymbol{w}$ es otro vector con la dirección de $\boldsymbol{v}$, entonces

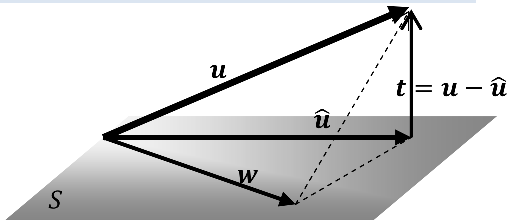
  $$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}}) + (\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{w})$$

  donde los vectores $(\boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}})$ y $(\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{w})$ son ortogonales, el teorema de Pitágoras asegura:

  $$d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})^2 = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}}\|^2 + \|\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{w}\|^2 \geq \|\boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}}\|^2 = d(\boldsymbol{u},\hat{\boldsymbol{u}})^2$$

14.2. PROYECCIÓN DE UN VECTOR SOBRE UN SUBESPACIO

Sea $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ y sea S un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.



Se llama **proyección ortogonal** del vector $\boldsymbol{u}$ sobre el subespacio S al vector $\hat{\boldsymbol{u}} \in S$ que verifica que $\boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{t} \in S^{\perp}$, se escribe como:

$$p_S(\boldsymbol{u}) = \hat{\boldsymbol{u}}$$

OBSERVACIÓN

El vector $p_S(\boldsymbol{u})$ es el vector de S que minimiza la distancia a $\boldsymbol{u}$, es decir:

$$d(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{u}}) = \|\boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}}\| \leq \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}\| = d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), \text{ para todo } \boldsymbol{w} \in S$$

14.2.1. PROYECCIÓN ORTOGONAL DE $\boldsymbol{u}$ A PARTIR DE BASE ORTOGONAL DE S

Sea $B_S^{og} = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_r}\}$ una base ortogonal de S, entonces la proyección ortogonal de $\boldsymbol{u}$ sobre S es el vector:

$$p_S(\boldsymbol{u}) = \frac{\prec \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a_1} \succ}{\prec \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_1} \succ}\boldsymbol{a_1} + \frac{\prec \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a_2} \succ}{\prec \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_2} \succ}\boldsymbol{a_2} + \cdots + \frac{\prec \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a_r} \succ}{\prec \boldsymbol{a_r}, \boldsymbol{a_r} \succ}\boldsymbol{a_r}$$

EJEMPLO 8

Calcular la proyección ortogonal de $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sobre el subespacio $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, x + y = 0 \right\}$

Solución

A partir de las ecuaciones implícitas, se calcula una base del subespacio S resolviendo el sistema:

$$(\boldsymbol{1} \quad 1 \quad 0 \quad 0|0) \underset{\substack{y=\lambda \\ z=\mu \\ t=\nu}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \mu \\ t = \nu \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A partir de los generadores obtenidos, se deduce una base de S que en este caso es ortogonal. De no haber sido ortogonal, se aplicaría el proceso de Gram – Schmidt para obtener la base con las condiciones requeridas.

$$B_S^{og}=\left\{\boldsymbol{a_1}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a_2}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Se calcula el vector $p_S(\boldsymbol{u})$:

$$p_S(\boldsymbol{u})=\frac{\prec \boldsymbol{u},\boldsymbol{a_1}\succ}{\prec \boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_1}\succ}\boldsymbol{a_1}+\frac{\prec \boldsymbol{u},\boldsymbol{a_2}\succ}{\prec \boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_2}\succ}\boldsymbol{a_2}+\frac{\prec \boldsymbol{u},\boldsymbol{a_r}\succ}{\prec \boldsymbol{a_r},\boldsymbol{a_r}\succ}\boldsymbol{a_r}=$$

$$=\frac{\begin{pmatrix}0&2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}-1&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{\begin{pmatrix}0&2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{\begin{pmatrix}0&2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{2}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{-1}{1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

14.2.2. PROYECCIÓN ORTOGONAL DE $\boldsymbol{u}$ A PARTIR DE BASE ORTOGONAL DE $S^{\perp}$

Sea $B_{S^\perp}^{og}=\{\boldsymbol{a_{r+1}},\dots,\boldsymbol{a_n}\}$ una base ortogonal del subespacio $S^{\perp}$, complementario ortogonal de S. Entonces se tiene que

$$\boldsymbol{t}=\frac{\prec \boldsymbol{u},\boldsymbol{a_{r+1}}\succ}{\prec \boldsymbol{a_{r+1}},\boldsymbol{a_{r+1}}\succ}\boldsymbol{a_{r+1}}+\cdots+\frac{\prec \boldsymbol{u},\boldsymbol{a_n}\succ}{\prec \boldsymbol{a_n},\boldsymbol{a_n}\succ}\boldsymbol{a_n}$$

Y por tanto

$$p_S(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{t}=\boldsymbol{u}-\frac{\prec \boldsymbol{u},\boldsymbol{a_{r+1}}\succ}{\prec \boldsymbol{a_{r+1}},\boldsymbol{a_{r+1}}\succ}\boldsymbol{a_{r+1}}-\cdots-\frac{\prec \boldsymbol{u},\boldsymbol{a_n}\succ}{\prec \boldsymbol{a_n},\boldsymbol{a_n}\succ}\boldsymbol{a_n}$$

EJEMPLO 9

Calcular la proyección ortogonal de $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$ sobre el subespacio $S=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix},x+y=0\right\}$ usando el método descrito en el apartado 14.2.2, y comparar el resultado con el obtenido en el ejemplo 8.

Solución

A partir de la ecuación implícita de S, se puede calcular un conjunto generador de $S^{\perp}$:

$$S=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}, x+y=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}, (1\quad 1\quad 0\quad 0)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=0\right\}=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}^{\perp}$$

Por tanto $S^{\perp}=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ y por tener un solo vector no nulo, constituye una base ortogonal:

$$B_{S^{\perp}}^{og}=\left\{\boldsymbol{a_4}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

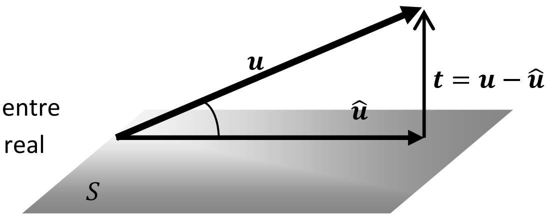
$$\boldsymbol{t}=\frac{\prec \boldsymbol{u},\boldsymbol{a_4}\succ}{\prec \boldsymbol{a_4},\boldsymbol{a_4}\succ}\boldsymbol{a_4}=\frac{(0\quad 2\quad 1\quad -1)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}{(1\quad 1\quad 0\quad 0)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ p_S(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{t}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Y como era de esperar, el resultado obtenido coincide con el del ejercicio 8.

14.3. DISTANCIA Y ÁNGULO ENTRE UN VECTOR Y UN SUBESPACIO

Sean $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n$, S un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y $p_S(\boldsymbol{u})=\widehat{\boldsymbol{u}}$ el vector proyección ortogonal de $\boldsymbol{u}$ sobre el subespacio S.



Se define **distancia** entre S y $\boldsymbol{u}$ a la distancia que hay entre $\boldsymbol{u}$ y su proyección ortogonal sobre S es decir, al valor real no negativo:

$$d(S,\boldsymbol{u})=\|\boldsymbol{u}-\widehat{\boldsymbol{u}}\|$$

Se define **ángulo** entre S y $\boldsymbol{u}$ al ángulo que forman los vectores $\boldsymbol{u}$ y su proyección ortogonal sobre S es decir, al único valor $\alpha\in[0,\pi]$ tal que

$$\cos(\alpha)=\frac{\boldsymbol{u}^t\widehat{\boldsymbol{u}}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\widehat{\boldsymbol{u}}\|}$$

EJEMPLO 10

Calcular el ángulo que forma el vector $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ con el subespacio $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, x + y = 0 \right\}$, y la distancia que hay entre el vector y el subespacio.

Solución

Como se ha visto en los ejemplos anteriores, se tiene que $\hat{\boldsymbol{u}} = p_S(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, por tanto:

$$d(S, \boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$$

Y

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{4}{\sqrt{6}\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$